Examen final

Responsables: ***Jean-Guy Simonato, Pascal Lysaught***

DEUXIÈME PARTIE : 2 HEURES

- **Toute documentation**
- **Calculatrice autorisée**
- **Ordinateur avec support virtuose**

Question 1 (10 points)

a) Quelle est la borne de prix inférieure d'une option d'achat européenne de huit mois sur un titre boursier sans dividende sachant que le prix du titre est de 50$, le prix d'exercice de l'option est de 40$ et le taux sans risque est de 5% par année (capitalisation continue).

b) Quelle est la borne de prix supérieure d'une option de vente européenne de trois mois sur un titre boursier sans dividende sachant que le prix du titre est de 40$, le prix d'exercice de l'option est de 55$ et le taux sans risque est de 5% par année (capitalisation continue).

Solution suggérée :

a) $c > S - Xe^{-rT} = 50 - 40\ e^{-0.05x0.67}$ = 11.32$

b) $p <= Xe^{-rT} = 55e^{-0.05x0.25}$ = 54.32 $

Question 2 (7.5 points)

À la question 1 du travail pratique de la séance 12, vous trouvez une trajectoire de prix ayant été simulée selon les hypothèses de Black-Scholes. Fixez les valeurs de S_0, μ, δt et σ à 50, 0.1, 1/12 et 0.2 respectivement.

a) Utilisez les prix simulés de T=0 à T=6 afin d'obtenir un **estimé des valeurs annuelles** de μ et σ. Rapportez vos résultats et expliquez la procédure suivie pour obtenir ces estimés.

b) Que représentent ces paramètres (μ et σ) dans le contexte du modèle de Black-Scholes.

Solution suggérée :

- Voir Hull, chapitre 11, section 11.4
- Le μ représente le rendement espéré sur le titre, alors que le sigma représente la volatilité des rendements du titre.

Question 3 (15 points)

À la question 3 du travail pratique de la séance 11, on vous demandait de répliquer la valeur d'une option d'achat de style européen (call européen) à l'aide d'une stratégie de couverture. Adaptez les calculs trouvés dans cette feuille de travail au cas d'une option de vente américaine (put américain).

Afin de m'indiquer clairement comment vous avez réalisé cette adaptation, utilisez les étapes suivantes afin d'inscrire vos réponses dans votre cahier d'examen :

Étape 1 : indiquez moi comment vous avez modifié le calcul de la valeur de l'option dans l'arbre de prix de l'option et qu'elles sont les nouvelles valeurs obtenues.

Étape 2 : Indiquez moi, pour chaque période (chaque ligne) apparaissant dans le tableau « Espace réponse, question 3 » de cette feuille de travail, comment doivent être modifiés les calculs en ce qui concerne la colonne « Nombre d'actions à détenir » ainsi que la colonne « $$ restant à la fin de la période ».

Solution suggérée :

Étape 1 : On change le calcul de l'option à chaque nœud terminal pour Max(X-St;0). De plus, à chaque nœud, on prend le plus grand des montants entre la valeur actuelle des flux monétaires espérés de l'option (calculé avec les probabilités risques neutres) et le « payoff » d'un exercice immédiat. Voir l'exemple dans votre manuel à la section 10.5

Étape 2 : Le nombre d'actions à détenir est négatif puisqu'il s'agit d'une option de vente. Concernant les $$ restants à la fin de la période, ils vont changer tel qu'indiqué dans le tableau ci-dessous pour la ligne à la période 0. Pour les périodes suivantes, il n'y a pas lieu de répliquer les flux monétaires à l'aide du *delta hedging* puisque l'option est vendue!

Période	Prix du titre au début de la période	Nombre d'actions à détenir	Montant reçu pour la vente de l'option à t=0	Achat des actions à détenir en début de période	Emprunt	Vente des actions à la fin de la période	Rembour. de la dette et intérêts	$$ restant à la fin de la période
0	50.00	-0.4707	5.7897	23.5342	-29.3239	-18.8273	30.8273	12.0000
1	40.00	0.0000	#NA	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	48.00	0.0000	#NA	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	57.60	0.0000	#NA	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	69.12	#NA	#NA	#NA	#NA	#NA	#NA	#NA

Question 4 (15 points)

Voici le tableau 15.4 de votre manuel. Ce tableau illustre une stratégie de delta *hedging*. Le contrat d'option à couvrir est une option d'achat de style européen sur 100 000 actions avec X=50$, T=20 semaines, r=0.05 et σ =0.20. La valeur théorique du modèle de Black et Scholes est de 2.4$ pour une action (240 000$ pour 100 000 actions)

Semaine	**Prix du titre**	**Delta**	**Nombre d'actions achetées**	**Coût des actions achetées (milliers $)**	**Coût cumulatif (milliers $) (inclus les dépenses d'intérêt)**	**Dépenses d'intérêt (milliers $)**
0	49	0.522	52,200	2,557.8	2,557.8	2.5
1	49.75	0.568	4,600	228.9	2,789.2	2.7
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
19	46.63	0.007	(17 600)	(820.7)	290.0	0.3
20	48.12	0.000	(700)	(33.7)	256.6	

a) Expliquez ce que représente le delta d'une option et comment il est possible de le calculer pour le cas d'une option d'achat (5 lignes maximum).

b) Expliquez comment trouver le coût cumulatif de la semaine 1. (5 lignes maximum)

c) Expliquez pourquoi, dans cet exemple, le delta de l'option est de zéro à la date d'échéance (5 lignes maximum)

d) Expliquez clairement qu'elle est le but de cette stratégie de *hedging* (5 lignes maximum)

e) Si le gamma d'une option est très élevé, une telle stratégie de couverture (stratégie de delta *hedging* avec re-balancement du portefeuille à intervalles hebdomadaires) est-elle efficace ? (5 lignes maximum)

Solution suggérée :

a) b) Voir manuel de hull, chapitre 14, page 314

c) Le delta peut être interprété **(de façon approximative)** comme étant la probabilité que l'option finisse *in-the-money*. Il est clair qu'à une semaine avant l'échéance (semaine 19) la probabilité de terminer *in-the-money* est très faible puisque le prix du titre sous-jacent est de 46 5/8 et le prix d'exercice est de 50. À la date d'échéance, l'option est clairement *out-of-the-money* i.e. la probabilité de finir *in-the-money* est nulle.

d) Le but de cette stratégie est de couvrir l'émetteur de l'option. Cette stratégie assure à l'émetteur que, dans le cas ou l'option arrive *in-the-money* à la date d'échéance, son déboursé sera approximativement égal au prix payé par l'acheteur.

e) Le gamma d'une option représente une mesure de la stabilité du delta. Ainsi, une option avec un grand gamma aura un delta qui peut varier rapidement. Un re balancement hebdomadaire ne sera sans doute pas suffisant dans un tel contexte.

Question 5 (15 points)

La compagnie A désire emprunter à taux flottant alors que la compagnie B désire emprunter à taux fixe. Afin d'obtenir des meilleures conditions de crédit, A a contracté un emprunt à taux fixe avec une institution financière alors que B a contracté un prêt à taux flottant. Les compagnies A et B ont par la suite contracté un accord de swap entre elles d'une durée de 3 ans pour un montant notionnel sous-jacent de 100 $.

Cet accord stipule que A verse à B à tous les six mois un montant égal à 100 $ x L/2 ou L est le taux libor de 6 mois prévalant à la date du paiement. En contrepartie B paye à A à tous les 6 mois un montant fixe de 100$ x 7.95%/2.

a) Sachant qu'il reste 1 an et 3 mois d'ici l'échéance du swap et que la courbe des taux d'intérêt spot est

	6 mois	**12 mois**
Cap. semestrielle	0.0400	0.0900

Calculez la valeur au marché du swap pour la compagnie A selon l'approche du portefeuille d'obligation.

b) M. Tremblay, le comptable de la compagnie A est confus et désemparé. En effet, il doit remettre le rapport d'impôt provincial de la compagnie demain matin et le moindre retard pourrait entraîner une amende substantielle. Il lui manque certaines informations clés reliées au contrat swap entre A et B. Ces informations viennent d'être malencontreusement détruites par le nouvel assistant comptable. M. Tremblay est très surpris. L'assistant comptable avait pourtant été fortement recommandé par le supérieur de son employeur précédent.

Sachant que :

i. Les conditions d'emprunts (en termes de taux) sont meilleures pour A que pour B et ce tant pour les emprunts fixes que variables;
ii. Par rapport à la situation où A et B auraient empruntés l'argent directement d'une institution financière, le gain de A (sur une base annuelle) est de 0.25% et celui de B est de 0.25%;
iii. Que la condition d'emprunt de A à une institution financière était de 8% (nominal annuel, capitalisation semestrielle) pour un emprunt à taux fixe;
iv. Que l'avantage comparatif de A par rapport à B pour l'emprunt à une institution financière au taux variable est de 0.7% (nominal annuel, capitalisation semestrielle)

trouvez qu'elles étaient les conditions initiales d'emprunt proposées par l'institution financière à la compagnie B pour des prêts à taux fixes et variables. M. Tremblay doit connaître ces conditions afin de compléter l'Annexe 54c requise pour le calcul de l'impôt provincial.

Solution suggérée :

On sait que avec le swap, le taux variable net payé par A aurait été de

A emprunte fixe	-8%
A verse à B	-L
B verse à A	7.95%

	-L – 0.05%

Comme le gain de A est de 0.25%, le taux variable que A pouvait obtenir de l'institution financière était de L + 0.05% + 0.25%. Donc Va=0.3%;

Comme (Vb-Va)=0.7% alors Vb=1.0%

De plus, on sait que avec le swap, le taux fixe net payé par B aurait été de

B emprunt variable	-L - Vb
B verse à A	-7.95%
A verse à B	L

	-7.95% - Vb

Comme le gain de B est de 0.25%, le taux fixe que A pouvait obtenir de l'institution financière était de Fb=7.95%+Vb+0.25%. Comme Vb=1.0% alors Fb=7.95%+1%+0.25%=9.2%